

Решение 10-11 классы

Задача 1.

На околоземную орбиту отправляется космический аппарат на ракете-носителе. Удельный импульс ракеты равен 3000 м/с. Масса ракеты без топлива и нагрузки 20 т. Стартовая масса ракеты не более 400 т. Определите максимальную массу полезной нагрузки, которую можно было бы отправить на ракете. Постройте график зависимости минимально необходимой массы топлива от массы полезной нагрузки.

Для решения задачи необходима формула Циолковского:

$$V = I \cdot \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right),$$

где V - конечная скорость летательного аппарата;

I - удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

M_1 - начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

M_2 - конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Решение.

Из условия следует, что скорость V - первую космическую, равную 7,9 км/с. Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} V = I \cdot \ln\left(\frac{m_{\text{пн}} + m_{\text{п}} + m_{\text{т}}}{m_{\text{п}} + m_{\text{п}}}\right) \\ m_{\text{пн}} + m_{\text{п}} + m_{\text{т}} \leq 400 \cdot 10^3 \end{cases}$$

$$\ln\left(\frac{m_{\text{пн}} + m_{\text{п}} + m_{\text{т}}}{m_{\text{п}} + m_{\text{п}}}\right) = \frac{V}{I}$$

$$\frac{m_{\text{пн}} + m_{\text{п}} + m_{\text{т}}}{m_{\text{пн}} + m_{\text{п}}} = e^{\frac{V}{I}}$$

Для максимальной полезной нагрузки:

$$\frac{1}{m_{\text{пн}} + m_{\text{п}}} = \frac{e^{\frac{V}{I}}}{400}$$

$$m_{\text{пн}} = \frac{400 \cdot 10^3}{e^{\frac{V}{I}}} - m_{\text{п}} = \frac{400 \cdot 10^3}{\frac{7900}{2,73000}} - 20 \cdot 10^3 = 9250 \text{ кг}$$

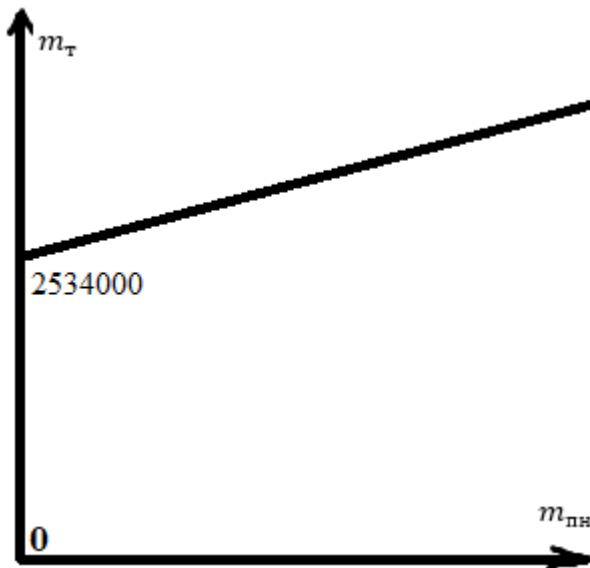
В общем виде:

$$\frac{1}{m_{\text{пн}} + m_{\text{п}}} = \frac{e^{\frac{V}{I}} - 1}{m_{\text{т}}}$$

Решение 10-11 классы

$$m_{\text{пн}} = \frac{m_{\text{т}}}{\frac{v}{eT} - 1} - m_{\text{р}} = \frac{m_{\text{т}}}{12.67} - 20000$$

$$m_{\text{т}} = 12.67 * m_{\text{пн}} + 253400$$



Задача 2

Искусственный спутник вращается вокруг неизвестной планеты со скоростью 30 км/с на орбите, высотой 9000 километров. Масса спутника – 100 кг, масса планеты в 1,5 раза больше массы Земли (масса Земли: $(5,9722 \pm 0,0006) \times 10^{24}$ кг). Необходимо найти радиус неизвестной планеты.

Решение.

1. Вспомним формулу центростремительного ускорения.

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_{\text{пл}} + H}$$

2. Найдем массу планеты, которая больше массы Земли.

3. Вспомним закон всемирного тяготения.

$$F = Gm M / (R_{\text{пл}} + H)^2$$

4. Запишем второй закон Ньютона для искусственного спутника.

$$ma = F$$

2. Выполним подстановку. Далее выразим из полученного уравнения $R_{\text{пл}}$ – радиус, который необходимо найти

$$m \frac{v^2}{R_{\text{пл}} + H} = Gm \frac{M}{(R_{\text{пл}} + H)^2}$$

$$R_{\text{пл}} = \left(\frac{GM}{v^2} \right) - H = \frac{6,67 * 10^{-11} * 1,5 * 5,97 * 10^{24}}{(30 * 10^3)^2} - 9000 = 663665 - 9000 = 654665 \text{ км}$$